Definujte skalárny a vektorový súčin dvoch vektorov. Vyjadrite dvojnásobný vektorový súčin. Definujte veľkosť vektora a vyjadrite ju pomocou zložiek.

Skalárny súčin –Výsledkom skalárneho súčiny vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ je reálne číslo – skalár, ktorého veľkosť sa rovná veľkosti súčinu absolútnych hodnôt obidvoch vektorov a kosínu uhla α nimi zovretého. Zapisujeme

$$c = \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\,\alpha$$

Vektorový súčin –Výsledkom vektorového súčinu vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$, ktorého orientácia je na tú stranu, z ktorej sa javí orientácia uhla α zovretého vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ (*! v danom poradí !*) v kladnom smere otáčania (proti smeru pohybu hodinový ručičiek). Zapisujeme

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Veľkosť vektora $\vec{c}$ je daná vzťahom

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\alpha$$

□

Pre dvojnásobný vektorový súčin platí

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}.\vec{b})$$

Veľkosť vektora je vyjadrená v tvare

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Vyjadrite časovú deriváciu vektora, ktorého veľkosť sa s časom nemení (môže sa otáčať)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{r}$ – (polohový, ľubovoľný) vektor, $[r]$ =m

$\vec{\omega}$ – vektor uhlovej rýchlosti, $[\omega]$ =s^{-1}

Napíšte vzťah vyjadrujúci rozklad zrýchlenia na normálovú a tangenciálnu zložku

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} - \frac{v}{r^2}\vec{\varrho}$$

$\vec{a}$ – vektor zrýchlenia, $[a]$=m s^{-2}

$\vec{a}_t$ – vektor tangenciálnej zložky zrýchlenia, $[a_t]$ =m s^{-2}

$\vec{a}_n$ – vektor normálovej zložky zrýchlenia, $[a_n]$ =m s^{-2}

v – veľkosť rýchlosti hmotného bodu, $[v]$=m s^{-1}

r – veľkosť polomeru oskulačnej kružnice krivky krivočiareho pohybu v danom bode, $[r]$=m

Definujte impulz sily a vyjadrite jeho súvis s celkovou zmenou hybnosti

Vektor impulzu sily je definovaný

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

a jeho súvis s celkovou zmenou hybnosti hmotného bodu je

$$\vec{I} = \Delta\,\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$$

$\vec{I}$ – vektor impulzu sily, $[I]=\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

$\vec{F}$ – vektor sily, $[F]=\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$

$\vec{p}$ – vektor hybnosti, $[p]=\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

t – čas, $[t]=\mathrm{s}$

Definujte moment sily a moment hybnosti. Závisia do polohy vzťažného bodu

moment sily – je zavedený ako vektorový súčin polohového vektora hmotného bodu, na ktorý pôsobí sila, s vektorom tejto sily

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$$

moment hybnosti – je zavedený ako vektorový súčin polohového vektora hmotného bodu s vektorom jeho hybnosti

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$$

Moment sily a moment hybnosti závisia od polohy vzťažného bodu.

Definujte ťažisko. Napíšte vety o ťažisku.

Ťažisko dvoch hmotných bodov m_1, m_2 je taký bod na ich spojnici, ktorý ju delí v obrátenom pomere k ich hmotnostiam. V ťažisku je pôsobisko tiažovej sily.

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Vety o ťažisku:

1. Ťažisko systému hmotných bodov sa pohybuje tak, ako keby bola celá hmotnosť sústredená v ťažisku a v ňom pôsobili všetky sily

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_T$$

2. Hybnosť sústavy hmotných bodov je rovná súčinu celkovej hmotnosti tejto sústavy a rýchlosti pohybu ťažiska

$$\vec{p} = m\,\vec{v}_T$$

3. Výsledný moment tiažových síl jednotlivých hmotných bodov danej sústavy sa rovná momentu tiažovej sily pre hmotný bod, ktorého hmotnosť je rovná súhrnnej hmotnosti súsravy a jeho polohový vektor je rovný polohovému vektoru ťažiska tejto sústavy hmotných bodov.
$$\vec{M} = \vec{r}_T \times m\vec{g}$$

$\vec{r}_T$ – polohový vektor ťažiska, $[r_T]$=m

$\vec{F}$ – vektor sily, $[F]$=N

$\vec{a}_T$ – vektor zrýchlenia ťažiska, $[a_T]$=m s^{-2}

$\vec{p}$ – vektor hybnosti, $[p]$=kg m s^{-1}

m – hmotnosť, $[m]$=kg

$\vec{g}$ – vektor tiažového zrýchlenia, $[g]$=m s^{-2}

$\vec{M}$ – vektor momentu sily, $[M]$=kg m^2 s^{-2}

$\vec{v}$ – vektor rýchlosti, $[v]$=m s^{-1}

Napíšte Steinerovu vetu pre moment sily a moment hybnosti

Pre moment sily

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) = \vec{M} - \vec{R} \times \vec{F}$$

odkiaľ vyplýva Steinerova veta pre moment sily

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{R} \times \vec{F}$$

Podobným postupom dostaneme pre moment hybnosti

$$\vec{G} = \vec{G}' + \vec{R} \times \vec{p}$$

$\vec{M}$ – vektor momentu sily, $[M]$=kg m^2 s^{-2}

$\vec{F}$ – vektor sily, $[F]$=kg m s^{-2}

$\vec{r}$ – polohový vektor, $[r]$=m

$\vec{G}$ – vektor momentu hybnosti, $[G]$=kg m^2 s^{-1}

$\vec{p}$ – vektor hybnosti, $[p]$=kg m s^{-}1

Vyjadrite moment hybnosti tuhého telesa

$$\vec{G} = \vec{G}_{\mathrm{os}} + \vec{G}_{\perp} = J\,\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{U}$$

$\vec{G}$ – vektor momentu hybnosti, $[G]$=kg m^2 s^{-1}

$\vec{\omega}$ – vektor uhlovej rýchlosti, $[\omega]$=s^{-1}

J – moment zotrvačnosti vzhľadom na os rotácie, $[J]$=kg m^2

$\vec{U}$ – deviačný moment, $[U]$=kg m

Napíšte Newtonov gravitačný zákon a definujte vektor intenzity gravitačného poľa

Hmotný bod M pôsobí na hmotný bod m príťažlivou silou, ktorá je úmerná hmotnosti týchto telies a nepriamo úmerná štvorcu vzdialenosti medzi týmito telesami. Platí pre ňu vzťah

$$\vec{F} = -\kappa \frac{m\,M}{r^3} \vec{r}$$

Vektor intenzity gravitačného poľa telesa s hmotnosťou M je definovaný vzťahom

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

Predstavuje silu pôsobiacu na teleso jednotkovej hmotnosti

$\vec{F}$ – vektor sily, $[F]$=kg m s^{-2}

κ – univerzálna gravitačná konštanta, $\kappa = 6.67\,10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}

M, m – hmotnosti telies, $[M]$, $[m]$=kg

$\vec{r}$ – polohový vektor telesa m voči telesu M, $[r]$=m

$\vec{E}$ – vektor intenzity, $[E]$=m s^{-2}

Vyjadrite tok vektora intenzity gravitačného poľa uzavretou plochou

Gaussov zákon pre gravitačné pole

$$\oint_S \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\kappa\, m$$

$\vec{E}$ – vektor intenzity gravitačného poľa, $[E]$=m s^{-2}

$\mathbf{d}\vec{S}$ – vektorový element uzavretej plochy, $[\mathrm{d}S]$=m^2

κ – univerzálna gravitačná konštanta, $\kappa = 6.67\,10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}

m – celková hmotnosť nachádzajúca sa v objeme uzavretým danou uzavretou plochou S, $[m]$=kg